

Nalezněte všechna řešení rovnice

$$y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

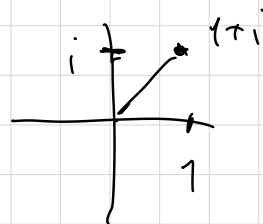
Nejprve řešíme homogenní rovnici

$$y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = 0.$$

Nalezneme fund. sys.

Char. pol. má tvar

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2$$



dořeň jso $\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$

Obtahneme $\xi = 1+i$, pak $\xi = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$

Dostáváme Fund. sgs.

$$\left\{ (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right\}, \left\{ (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right\}$$

Nekážame 1 řešení pro danou pravou stranu.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \text{ je tvaru } \lambda^n \left(P(n) \cos(\gamma n) + \right. \\ \left. + Q(n) \sin(\gamma n) \right) \text{ pro } \lambda=1, \gamma=\frac{\pi}{2}, P(n)=1, \\ Q(n)=0. \quad 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = i$$

neříkáme, že je pol. homogenní rovnice.

Hledá se řešení ve tvaru $2^n n^m (R(n) \cos(2n) + S(n) \sin(2n))$, tedy v našem případě

$$\underline{\tilde{y}(n) = a \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + b \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$$

Dosazení do rovnice pro $n = 1, 2$:

$$0 = -b - 2(-a) + 2b = 2a + b$$

$$-1 = a - 2(-b) + 2(-a) = -a + 2b$$

Tedy $-2 = 5b$ i.e. $b = -\frac{2}{5}$, dosazujeme

$$0 = 2a - \frac{2}{5} \quad \text{i.e.} \quad a = \frac{1}{5}$$

Tedy dostáváme $\tilde{f} = \frac{1}{5} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{2}{5} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

2 věty o speciální pravé straně plynou,

Ěe $\tilde{y}(x)$ Ěesí rovnici.

Všechna řešení jsou tvaru

$$y(x) = \frac{1}{5} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{2}{5} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C_1 \left(\sqrt{2}\right)^x \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + C_2 \left(\sqrt{2}\right)^x \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$2) \quad y(n+3) - y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = n+2^n$$

Char. pol. homogenní rovnice je

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 2 &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2) = \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Její fund. systém je

$$\{1\}, \{(\sqrt{2})^n\}, \{(-\sqrt{2})^n\}$$

$\{a_n + z^n\}$ není tvaru $\{2^n (P(n)\cos(\varphi_n) + Q(n)\sin(\varphi_n))\}$, ale $\{a_n\}$ i $\{z^n\}$ totožný tvaru json.

- z^n je darež tvaru pro $\alpha = z$, $\varphi = 0$, $P(n) = 1$ a $Q(n)$ nezaleží. z není žádný char. pol.

$$z^n (R(n) + S(n) \cdot i) \quad \text{, kde } R(n) = a.$$

$$= z \cdot (\cos(0) + i \sin(0))$$

i.e. $\tilde{f}(n) = a z^n$.

Possadím do rovnice s $a = 1$.

$$16a - 8a - 2 \cdot 4a + 2 \cdot 2a = 2$$

$$4a = 2$$

$$a = \frac{1}{2}$$

i.e. $\tilde{y}(n) = 2^{n-1}$

• n je dané bo tvaru pro $\alpha=1, \gamma=0,$

$P(n)=n$, na $Q(n)$ nezáleží.

$1 \cdot (\cos(0) + i \sin(0)) = 1$ je boiem char. pol.

o ne' solnosti 1. Hledán tedy řešení ve tvaru

$$\hat{y}(n) = n \underbrace{(an + b)}_{R(n)}$$

Dosazení do rovnice pro $n = 1, 2$:

$$4(4a + b) - 3(3a + b) - 2 \cdot 2(2a + b) + 2(a + b) = 1$$

$$5(5a + b) - 4(4a + b) - 2 \cdot 3(3a + b) + 2 \cdot 2(2a + b) = 2$$

po úprave:

$$a - b = 1$$

$$-a - b = 2$$

Tedy $-2b = 3$ i.e. $b = -\frac{3}{2}$,

$$a + \frac{3}{2} = 1 \text{ i.e. } a = -\frac{1}{2}.$$

dosazení do

Rovnice! musíme

$$\hat{y}(n) = -\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

z linearity poslouhmost $\bar{y}(n) = \hat{y}(n) + \hat{y}(n)$

$$= 2^{n-1} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n \text{ řeší původní rovnici.}$$

Obecné řešení je

$$y(x) = 2^{x-1} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + C_1 + C_2(\sqrt{2})^x + C_3(-\sqrt{2})^x$$

$$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

3) Na ležeré te řísení splňující danou poč. pod.:

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = n^2, \quad y(1) = 3, y(2) = 2$$

(kr. pol. homogenní rovnice je

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1),$$

její fund. systém je

$$\{2^n\}, \{1\}.$$

n^2 je spec. tvaru $\lambda=1, \nu=0, P(n)=n^2$,
na $\mathbb{Q}$ nezaléží. $1 \cdot (\cos(0) + i \sin(0))$ je kořen
char. pol. a má sobaosti 1.

Hledám řešení $R(n)$
 $\tilde{f}(n) = n (an^2 + bn + c)$

Pozastavím do rovnice pro $n = 1, 2, 3$:

$$3(9a + 3b + c) - 3 \cdot 2(4a + 2b + c) + 2(a + b + c) = 1$$

$$4(16a + 4b + c) - 3 \cdot 3(9a + 3b + c) + 2 \cdot 2(4a + 2b + c) = 4$$

$$5(25a + 5b + c) - 3 \cdot 4(16a + 4b + c) + 2 \cdot 3(9a + 3b + c) = 9$$

po úpravě

$$5a - b - c = 1$$

$$-a - 3b - c = 4$$

$$-13a - 5b - c = 9$$

$$6a + 2b = -3$$

$$= 11a - 2b = 5$$

$$\rightarrow -6a = 2$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

Podmín : $-2 + 2b = -3$ i.e. $b = -\frac{1}{2}$

a $-\frac{5}{3} + \frac{1}{2} - C = 1$

$$-C = \frac{1}{2} + \frac{5}{3}$$

$$C = -\frac{13}{6}$$

Tedy $y^2(z) = -\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{13}{6}z$, obecná řešení je

$$y(z) = -\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 - \frac{13}{6}z + C_1 + C_2 z^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Dosa zcrím poč. podmínok:

$$3 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{13}{6} + C_1 + 2C_2$$

$$2 = -\frac{1}{3} 8 - \frac{1}{2} 4 - \frac{13}{6} \cdot 2 + C_1 + 4C_2$$

Príprava: $6 = C_1 + 2C_2$

$$11 = C_1 + 4C_2$$

$$5 = 2C_2$$

i.e. $C_2 = \frac{5}{2}$

$$C_1 = 1$$

Hleďme řešení je tedy

$$g(n) = -\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{13}{6}n + 1 + 5 \cdot 2^{n-1}$$